

Clasificador Asociativo de Patrones: Avances Teóricos

Raúl Santiago Montero, Juan Luis Díaz de León Santiago, Cornelio Yáñez Márquez

Laboratorio de Reconocimiento de Patrones y Procesamiento de Imágenes

Centro de Investigación en Computación

Instituto Politécnico Nacional

Tel: 57296000 Ext. 56584 {cyanez, jdiaz, rsantiago}@cic.ipn.mx

RESUMEN

En este trabajo se incluyen los avances teóricos que han aecido en relación con el algoritmo del Clasificador Híbrido de Patrones (CHP) presentado en (Santiago, Díaz de León & Yáñez, 2002). Con la aparición del CHP se creó el enfoque asociativo de reconocimiento de patrones el cual, al ir evolucionando como lo muestran los avances teóricos presentados aquí, se ha convertido en una alternativa real para la clasificación de patrones, de modo que el CHP es ya un clasificador cuyo rendimiento es significativo, al compararlo con clasificadores basados en enfoques clásicos como el probabilístico - estadístico o el de distancia mínima.

Palabras clave:

Reconocimiento de Patrones, Clasificador de Patrones, Enfoque Asociativo, CHP.

I. INTRODUCCIÓN

Una memoria asociativa tiene como propósito fundamental recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado.

El problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

En ambas fases, una *memoria asociativa* M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$x \rightarrow \boxed{M} \rightarrow y$$

El patrón de entrada está representado por un vector columna denotado por x y el patrón de salida, por el vector columna denotado por y . Cada uno de los patrones de entrada forma una asociación con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones x y y del esquema forman la asociación (x, y) .

Dado un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será (x^k, y^k) . La memoria asociativa M se representa mediante una matriz cuya componente ij -ésima es m_{ij} [9]; la matriz M se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones

$$\{(x^\mu, y^\mu) | \mu = 1, 2, \dots, p\}$$

conocidas de antemano: éste es el conjunto fundamental de asociaciones o simplemente conjunto fundamental. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

Definición 1.1: A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama *patrones fundamentales*.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas (Kohonen, 1972).

Definición 1.2: Si se cumple que:

$$x^\mu = y^\mu \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$$

se dice que la memoria es *autoasociativa*; de otro modo, la memoria es *heteroasociativa*. Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente:

$$\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tal que } x^\mu \neq y^\mu$$

Definición 1.3: Si al presentarle a la memoria M un patrón alterado \tilde{x}^ω como entrada ($\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$), M responde con el correspondiente patrón fundamental de salida y^ω , se dice que la recuperación es *perfecta*.

Definición 1.4: Una *memoria perfecta* es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Los conjuntos A y B cumplen con lo siguiente: las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, son elementos del conjunto A , y las entradas de M son elementos del conjunto B .

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A , y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A ; es decir:

$$x^\mu \in A^n \text{ y } y^\mu \in A^m$$

La j -ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice:

($j \in \{1, 2, \dots, n\}$ o $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ según corresponda).

La j -ésima componente de un vector columna x^μ se representa por:

$$x_j^\mu$$

Los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida son, respectivamente:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad y^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

EL TRABAJO DE STEINBUCH

La *Lernmatrix* es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida; es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario

$x^\mu \in A^n$, $A = \{1, 0\}$ y produce como salida la clase $y^\mu \in A^m$ que le corresponde (de entre m clases diferentes).

Las clases se codifican de la siguiente forma: para la clase $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, se asignan a las componentes del vector de salida y^μ los siguientes valores:

$$y_k^\mu = 1, \quad y_j^\mu = 0$$

para $j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m$.

En la tabla se esquematiza la fase de aprendizaje para la *Lernmatrix* de Steinbuch, con la pareja de patrones fundamentales $(x^\mu, y^\mu) \in A^n \times A^m$.

$$\begin{matrix} & x_1^\mu & x_2^\mu & \dots & x_j^\mu & \dots & x_n^\mu \\ y_1^\mu & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ y_2^\mu & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu & m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu & m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mj} & \dots & m_{mn} \end{matrix} \quad (1)$$

Cada uno de los componentes m_{ij} de M , la *Lernmatrix* de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla,

$m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ -\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 \text{ y } x_j^\mu = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $x^\omega \in A^n$ dado.

Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $y^\omega \in A^m$ que le corresponde al patrón x^ω ; en virtud del método de construcción de los vectores y^μ la clase debería obtenerse sin ambigüedad.

La i -ésima coordenada y_i^o del vector de clase $y^o \in A^m$ se obtiene como lo indica la siguiente expresión, donde \forall es el operador *máximo*:

$$y_i^o = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j^o = \forall_{h=1}^m \left[\sum_{j=1}^n m_{hj} x_j^o \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

Ejemplo II.1: Tres patrones de dimensión 5, donde cada uno se asigna a una clase diferente:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

La fase de aprendizaje se inicia asignando el valor cero a todos los elementos m_{ij} y a continuación se realizan las operaciones de la crossbar 1 y la expresión 2 con las tres asociaciones, para obtener la Lernmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon & \epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & -\epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon & \epsilon & \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (4)$$

La fase de recuperación consiste en presentarle a la matriz M uno de los patrones de entrada y realizar las operaciones indicadas en la expresión 3; a la salida se espera obtener la clase a la que pertenece el vector de entrada.

$$M \cdot x^1 = \begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon & \epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & -\epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon & \epsilon & \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

Se observa que:

$$\sum_{j=1}^5 m_{1j} x_j^1 = 3\epsilon$$

$$\sum_{j=1}^5 m_{2j} x_j^1 = \epsilon$$

$$\sum_{j=1}^5 m_{3j} x_j^1 = \epsilon$$

Por ello, $\sum_{j=1}^5 m_{1j} x_j^1 = \forall_{h=1}^3 \left[\sum_{j=1}^5 m_{hj} x_j^1 \right]$ y de acuerdo con la expresión 3, se tiene que:

$$y_1^1 = 1 \text{ y } y_2^1 = y_3^1 = 0.$$

Por lo tanto, el vector que representa a la clase es y^1 .

De igual manera se recupera la clase a la que pertenecen los patrones de entrada x^2 y x^3 :

$$M \cdot x^2 = \begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon & \epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & -\epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon & \epsilon & \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 3\epsilon \\ -\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y^2$$

$$M \cdot x^3 = \begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon & \epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & -\epsilon & -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon & \epsilon & \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \\ -\epsilon \\ 3\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y^3$$

Ejemplo II.2: Agreguemos las siguientes dos asociaciones: (x^4, y^1) , (x^5, y^3) .

Donde:

$$x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La nueva *Lernmatrix* es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al intentar recuperar la clase para cada uno de los cinco patrones de entrada, se observa cómo la *Lernmatrix* llega a la saturación:

$$M \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Clase y^1 o y^3 ?

$$M \cdot x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Clase y^2 .

$$M \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Clase y^3 .

$$M \cdot x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Clase y^1 .

$$M \cdot x^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Clase y^1 o y^3 ?

III. EL TRABAJO DE ANDERSON Y KOHONEN.

Para presentar el *Linear Associator*, consideremos el conjunto fundamental $\{(x^\mu, y^\mu) | \mu = 1, 2, \dots, p\}$ con

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad y^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

La fase de aprendizaje consiste de dos etapas:

Etapas 1.- Para cada una de las p asociaciones (x^μ, y^μ) se encuentra matriz $y^\mu \cdot (x^\mu)'$ de dimensiones $m \times n$.

$$y^\mu \cdot (x^\mu)' = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu \quad x_2^\mu \quad \dots \quad x_n^\mu) \quad (5)$$

$$y^\mu \cdot (x^\mu)' = \begin{pmatrix} y_1^\mu x_1^\mu & \dots & y_1^\mu x_j^\mu & \dots & y_1^\mu x_n^\mu \\ y_2^\mu x_1^\mu & \dots & y_2^\mu x_j^\mu & \dots & y_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu x_1^\mu & \dots & y_i^\mu x_j^\mu & \dots & y_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu x_1^\mu & \dots & y_m^\mu x_j^\mu & \dots & y_m^\mu x_n^\mu \end{pmatrix} \quad (6)$$

Etapa 2.- Se suman las p matrices para obtener la memoria.

$$M = \sum_{\mu=1}^p y^{\mu} \cdot (x^{\mu})' = [m_{ij}]_{m \times n} \quad (7)$$

de manera que la ij -ésima componente de la memoria M se expresa así.

$$m_{ij} = \sum_{\mu=1}^p y_i^{\mu} x_j^{\mu} \quad (8)$$

La fase de recuperación consiste en presentarle a la memoria un patrón de entrada x^{ω} , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ y realizar la operación:

$$M \cdot x^{\omega} = \left[\sum_{\mu=1}^p y^{\mu} \cdot (x^{\mu})' \right] \cdot x^{\omega} \quad (9)$$

Al desarrollar la sumatoria de la expresión 9, se tiene:

$$M \cdot x^{\omega} = y^{\omega} \cdot [(x^{\omega})' \cdot x^{\omega}] + \sum_{\mu \neq \omega} y^{\mu} \cdot [(x^{\mu})' \cdot x^{\omega}] \quad (10)$$

La forma de la expresión 10 nos permite investigar las condiciones que se deben cumplir para que el método de recuperación propuesto dé como resultado salidas perfectas. Para que la expresión anterior aroje como resultado al patrón y^{ω} , es preciso que se cumplan dos igualdades:

a) $[(x^{\omega})' \cdot x^{\omega}] = 1$

b) $[(x^{\mu})' \cdot x^{\omega}] = 0$ siempre que $\mu \neq \omega$

Dado que ω se escogió arbitrariamente, las dos igualdades se deben cumplir $\forall \omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, lo cual indica que los vectores de entrada x^{μ} deben ser ortonormales. Esta condición de ortonormalidad se puede resumir en la siguiente expresión:

$$(x^{\mu})' \cdot x^{\omega} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \omega \\ 0 & \text{si } \mu \neq \omega \end{cases} \quad (11)$$

Si se cumple la condición que se manifiesta en la expresión 11, entonces la recuperación es perfecta; es decir, la expresión 10 toma la forma $M \cdot x^{\omega} = y^{\omega}$.

Sin embargo, si los vectores de entrada no son ortonormales, suceden dos cosas:

- El factor $[(x^{\omega})' \cdot x^{\omega}]$ no es 1
- El término $\sum_{\mu \neq \omega} y^{\mu} \cdot [(x^{\mu})' \cdot x^{\omega}]$ no es 0

Este último término, llamado *cross-talk*, representa el ruido producido por la interacción entre los patrones de entrada, y tiene como consecuencia inmediata que la recuperación no es perfecta, excepto si el número de patrones almacenados es pequeño comparado con la dimensión n de los vectores de entrada. Algunos investigadores afirman que ese número pequeño de patrones debe estar entre $0.1n$ y $0.2n$ [2,7,10].

Ejemplo III.1: Cuatro parejas de patrones ($p=4$), con $n=3$ y $m=5$.

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos los términos $y^{\mu} \cdot (x^{\mu})'$ usando la expresión 5.

$$y^1 \cdot (x^1)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y^2 \cdot (x^2)' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$y^3 \cdot (x^3)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y^4 \cdot (x^4)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene la memoria M a partir de las expresiones 7 y 8:

$$M = \sum_{\mu=1}^4 y^{\mu} \cdot (x^{\mu})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Se usa la expresión 9 y la memoria 12 para recuperación:

$$M \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq y^1$$

Análogamente con los otros tres patrones:

$$M \cdot x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = y^2$$

$$M \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq y^3$$

$$M \cdot x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq y^4$$

IV. CHP

Los ejemplos II.1, II.2 y III.1 ilustran el funcionamiento y las desventajas de los dos modelos de memorias asociativas, la *Lernmatrix* y el *Linear Associator*.

Por un lado, la *Lernmatrix* puede aceptar sólo patrones binarios como entradas, y el ejemplo II.2 muestra cómo se llega rápidamente a la saturación, fenómeno que impide la clasificación

correcta. Por otro lado, no obstante que el *Linear Associator* elimina la restricción de patrones binarios a la entrada, puesto que puede aceptar patrones con valores reales en sus componentes, surge una restricción bastante fuerte: la ortonormalidad de los patrones de entrada.

En el ejemplo III.1 sólo se recuperó un patrón de salida de manera perfecta, debido a los devastadores efectos que tiene, en la fase de recuperación, el término de *cross-talk* diferente de cero, en virtud de que los patrones de entrada no son ortonormales, como lo exige la expresión 11.

El Clasificador híbrido de patrones que es expuesto en [11,12] elimina las desventajas de ambos modelos, pero incluye algunos principios de diseño y operación de éstos. El algoritmo del CHP es como sigue:

1. Sea un conjunto fundamental de patrones de entrada de dimensión n con valores reales en sus componentes (a la manera del *Linear Associator*), que se aglutinan en m clases diferentes.
2. A cada uno de los patrones de entrada que pertenece a la clase k se le asigna el vector formado por ceros, excepto en la coordenada k -ésima, donde el valor es uno (a la manera de la *Lernmatrix*).
3. La fase de aprendizaje es similar a la del *Linear Associator*, de acuerdo con las expresiones 5, 7 y 8.
4. La fase de recuperación es similar a la que usa la *Lernmatrix*, de acuerdo con la expresión 3.

Este algoritmo simple nos permite diseñar un poderoso clasificador de patrones, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo IV.1: Cinco patrones de dimensión 2 con valores reales, aglutinados en dos clases diferentes:

A la primera clase pertenecen dos patrones:

$$x^1 = \begin{pmatrix} -4.1 \\ 3.8 \end{pmatrix} \text{ y } x^2 = \begin{pmatrix} -4.8 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

Tres patrones pertenecen a la segunda clase:

$$x^3 = \begin{pmatrix} -6.3 \\ -3.8 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} -6.2 \\ -3.1 \end{pmatrix} \text{ y } x^5 = \begin{pmatrix} -7.0 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior significa, de acuerdo con el inciso 2 del algoritmo, que los patrones de salida son los siguientes:

$$y^1 = y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } y^3 = y^4 = y^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de aprendizaje, de acuerdo con el inciso 3 del algoritmo, se calculan los términos $y^\mu \cdot (x^\mu)'$ usando la expresión 5, y el clasificar C se obtiene a partir de las expresiones 7 y 8:

$$C = \sum_{\mu=1}^5 y^\mu \cdot (x^\mu)' = \begin{pmatrix} -8.9 & 8.0 \\ -19.5 & -9.9 \end{pmatrix} \quad (13)$$

El inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo de acuerdo con la expresión 3.

$$C \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 66.89 \\ 42.33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$

$$C \cdot x^2 = \begin{pmatrix} 76.32 \\ 52.02 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$

$$C \cdot x^3 = \begin{pmatrix} 25.67 \\ 160.47 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

$$C \cdot x^4 = \begin{pmatrix} 30.38 \\ 151.59 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

$$C \cdot x^5 = \begin{pmatrix} 38.3 \\ 166.2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Nota 1: Resulta evidente que este problema de clasificación no puede ser resuelto por la *Lernmatrix* de Steinbuch, ya que los patrones de entrada no son binarios, como lo requiere ese modelo. Por otro lado, tampoco es posible resolverlo por el *Linear Associator*, debido a que los patrones de entrada no son ortonormales, como lo exige la expresión 11.

Ejemplo IV.2 Dos patrones de dimensión 2 con valores reales, aglutinados en dos clases diferentes:

A la primera clase pertenece el patrón:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 3.8 \end{pmatrix}$$

A la segunda clase:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 6.3 \\ 3.8 \end{pmatrix}$$

Lo anterior significa, de acuerdo con el inciso 2 del algoritmo, que los patrones de salida son los siguientes:

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } y^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de aprendizaje, de acuerdo con el inciso 3 del algoritmo, se calculan los términos $y^\mu \cdot (x^\mu)'$ y se obtiene el clasificador C:

$$C = \sum_{\mu=1}^2 y^\mu \cdot (x^\mu)' = \begin{pmatrix} 2.1 & 3.8 \\ 6.3 & 3.8 \end{pmatrix} \quad (14)$$

El inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$C \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 18.85 \\ 27.67 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿clase 2?}$$

$$C \cdot x^2 = \begin{pmatrix} 27.67 \\ 54.13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Nota 2: El ejemplo anterior nos muestra los efectos causados cuando tenemos al menos un patrón de entrada de magnitud mucho mayor a las magnitudes de los otros patrones de entrada, el clasificador tiende a asignar los patrones de menor magnitud a la clase cuyos patrones tienen la mayor magnitud.

V. CLASIFICADOR ASOCIATIVO DE PATRONES

El ejemplo IV.2 muestra una desventaja para la clasificación de patrones agrupados en un mismo cuadrante del plano, con una clase con patrones cuya magnitud es mucho mayor a la magnitud de los patrones de las otras clases presentes en el problema de clasificación. Esto para efectos prácticos representa una gran desventaja, dado que en el área de clasificación de patrones es una constante que los patrones de las clases a clasificar se encuentren en el mismo plano y con magnitudes diferentes en sus vectores.

La solución, que en el presente trabajo se realiza para resolver este problema, es la traslación de ejes, con el nuevo origen situado en el centroide de los vectores que representan a los patrones de entrada.

Sean x^1, x^2, \dots, x^p un conjunto de patrones de entrada, y sea \bar{x} el vector medio de todos ellos, donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x^j \quad (15)$$

Se trasladan los ejes tomando como origen las coordenadas del vector medio, para obtener un nuevo conjunto de patrones, a partir de todo el conjunto de patrones de entrada del conjunto fundamental; si denotamos por $x^{\mu'}$ a los vectores trasladados, entonces tenemos:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} - \bar{x} \quad (16)$$

$$\forall x^{\mu} \text{ donde } \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$$

Una vez trasladado todo el conjunto de patrones de entrada, se procede con el algoritmo descrito en la sección anterior. Este proceso de traslación se hace también con todo nuevo patrón de entrada que se desee clasificar.

Algoritmo del nuevo Clasificador Asociativo de Patrones.

1. Sea un conjunto fundamental de patrones de entrada de dimensión n con valores reales en sus componentes (a la manera del *Linear Associator*), que se aglutinan en m clases diferentes.
2. A cada uno de los patrones de entrada que pertenece a la clase k se le asigna el vector formado por ceros, excepto en la coordenada k -ésima, donde el valor es uno (a la manera de la *Lernmatrix*).
3. Se calcula el vector medio del conjunto de patrones muestra o prototipos con que se cuenta (conjunto fundamental).
4. Se toman las coordenadas del vector medio a manera del centro de un nuevo conjunto de ejes coordenados.
5. Se realiza la traslación de todos los patrones del conjunto fundamental.
6. Aplicamos la fase de aprendizaje, que es similar a la del *Linear Associator*.
7. Aplicamos la fase de recuperación, que es similar a la que usa la *Lernmatrix*.
8. Trasladamos todo patrón a clasificar en los nuevos ejes.
9. Procedemos a clasificar los patrones desconocidos.

Ejemplo V.1: Sea el mismo conjunto de patrones del ejemplo IV.2:

A la primera clase pertenece el patrón:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 3.8 \end{pmatrix}$$

A la segunda clase:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 6.3 \\ 3.8 \end{pmatrix}$$

Se realiza la traslación de los vectores de entrada, de acuerdo con 15; tenemos que:

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x^j = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2.1 \\ 3.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.3 \\ 3.8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 3.8 \end{pmatrix}$$

donde de acuerdo con 16 los patrones de entrada ahora son:

$$x^{1'} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 3.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.2 \\ 3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$x^{2'} = \begin{pmatrix} 6.3 \\ 3.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.2 \\ 3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior significa, de acuerdo con el inciso 2 del algoritmo, que los patrones de salida son los siguientes:

$$y^{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } y^{2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de aprendizaje, de acuerdo con el inciso 3 del algoritmo, se calculan los términos

$y^{\mu} \cdot (x^{\mu})'$ y se obtiene el clasificador C :

$$C = \sum_{\mu=1}^2 y^{\mu} \cdot (x^{\mu})' = \begin{pmatrix} -2.1 & 0 \\ 2.1 & 0 \end{pmatrix}$$

El inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo así:

$$C \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 4.41 \\ -4.41 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$

$$C \cdot x^2 = \begin{pmatrix} -4.41 \\ 4.41 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Ejemplo V.2: Dos patrones de dimensión 3 con valores reales, aglutinados en dos clases diferentes. Primero diseñaremos un CHP y lo

probaremos, para después diseñar un Clasificador Asociativo con objeto de comparar el funcionamiento de ambos clasificadores de patrones:

A la primera clase pertenece el patrón:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{pmatrix}$$

A la segunda clase:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 6.0 \\ 8.0 \\ 10.0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior significa, de acuerdo con el inciso 2 del algoritmo, que los patrones de salida son los siguientes:

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } y^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de aprendizaje, de acuerdo con el inciso 3 del algoritmo, se calculan los términos $y^\mu \cdot (x^\mu)'$ y se obtiene el clasificador C:

$$C = \sum_{\mu=1}^2 y^\mu \cdot (x^\mu)' = \begin{pmatrix} 2.0 & 3.0 & 6.0 \\ 6.0 & 8.0 & 10.0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

En inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$C \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 49.0 \\ 96.0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿clase 2?}$$

$$C \cdot x^2 = \begin{pmatrix} 96.0 \\ 200.0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Probemos el clasificador con otros patrones desconocidos pero que pertenecen a las clases involucradas en el ejemplo.

A la primera clase pertenece el patrón:

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 3.8 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

A la segunda clase:

$$x^4 = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 7.2 \\ 9.7 \end{pmatrix}$$

En inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$C \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 48.2 \\ 96.8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿clase 2?}$$

$$C \cdot x^2 = \begin{pmatrix} 92.6 \\ 193.0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

De acuerdo con el algoritmo del CHP, la recuperación no es perfecta y los patrones que pertenecen a la clase 1 son clasificados como clase 2.

Con la traslación de ejes se crea un Clasificador Asociativo, y se prueba el mismo conjunto fundamental, además de los mismos patrones desconocidos en la fase de aprendizaje

A la primera clase pertenece el patrón:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{pmatrix}$$

A la segunda clase:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 6.0 \\ 8.0 \\ 10.0 \end{pmatrix}$$

Se realiza la traslación de los vectores de entrada, de acuerdo con 15, entonces tenemos que:

$$\bar{x} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P x^j = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.0 \\ 8.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4.0 \\ 5.5 \\ 8.0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con 16 los patrones de entrada ahora son:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.0 \\ 5.5 \\ 8.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ -2.5 \\ -2.0 \end{pmatrix}$$

$$x^{2'} = \begin{pmatrix} 6.0 \\ 8.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.0 \\ 5.5 \\ 8.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.5 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior significa, de acuerdo con el inciso 2 del algoritmo, que los patrones de salida son los siguientes:

$$y^{1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad y^{2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de aprendizaje, de acuerdo con el inciso 3 del algoritmo, se calculan los términos $y^\mu \cdot (x^\mu)'$ y se obtiene el clasificador C:

$$C = \sum_{\mu=1}^2 y^\mu \cdot (x^\mu)' = \begin{pmatrix} -2.0 & -2.5 & -2.0 \\ 2.0 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

El inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$C \cdot x^1 = \begin{pmatrix} 14.25 \\ -14.25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$

$$C \cdot x^2 = \begin{pmatrix} -14.25 \\ 14.25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

Se procede ahora a probar el Nuevo Clasificador Asociativo con los vectores que no pertenecen al conjunto fundamental.

A la primera clase pertenece el patrón:

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 3.8 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

A la segunda clase:

$$x^4 = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 7.2 \\ 9.7 \end{pmatrix}$$

de acuerdo con 16 los patrones de entrada ahora son:

$$x^{3'} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 3.8 \\ 5.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.0 \\ 5.5 \\ 8.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1 \\ -1.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$x^{4'} = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 7.2 \\ 9.7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.0 \\ 5.5 \\ 8.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.7 \\ 1.7 \end{pmatrix}$$

El inciso 4 del algoritmo indica que la fase de recuperación se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$C \cdot x^{3'} = \begin{pmatrix} 13.45 \\ -13.45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 1}$$

$$C \cdot x^{4'} = \begin{pmatrix} -12.45 \\ 12.45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase 2}$$

VI. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

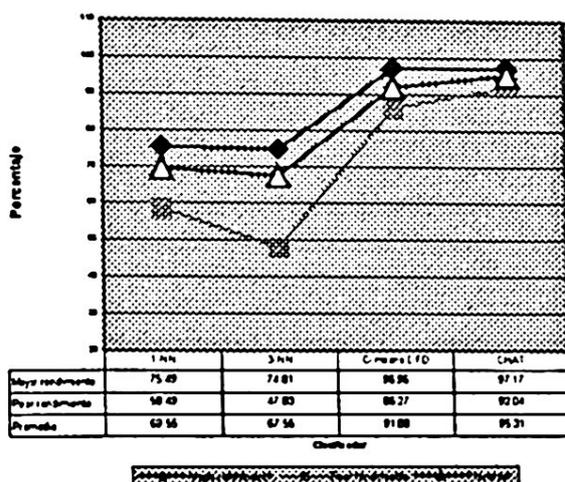
En esta sección se muestra experimentalmente el rendimiento del Clasificador Asociativo de Patrones, ante conjuntos de patrones contenidos en la base de datos pública Wine recognition data; estos patrones están agrupados en 3 clases. Los aspectos de interés que se tomaron en cuenta para realizar los experimentos son los mismos que se han registrado en la literatura sobre clasificadores, donde el punto de interés radica esencialmente en el porcentaje de clasificación correcta del conjunto de patrones contenidos en la base de datos.

Nota 3: Se tomaron los estudios comparativos que se realizaron en la tesis de maestría Algoritmo C-means difuso usando funciones de disimilaridad [4], que sometió esta misma base de datos a los clasificadores *Cmeans* y *Cmeans* difuso usando funciones de disimilaridad.

La base de datos se encuentran en la UCI Machine Learning Data Bases Repository, del ICS, de la universidad de California, Irvine:

<ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases>

Los experimentos se llevaron a cabo en una PC genérica con procesador Pentium II a 350MHz, 128 MBytes de RAM y un disco duro de 6 Gbytes, con sistema operativo Windows 2000 de Microsoft. El programa se realizó en el lenguaje C++ y se utilizó el compilador de Borland, C++ Builder 5.



VII. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se han presentado los avances conceptuales respecto del CHP, el clasificador Híbrido de Patrones que fue presentado en [10,11] y que marca un hito en la historia del reconocimiento de patrones, al propiciar el nacimiento de un nuevo enfoque; el asociativo. El CHP utiliza como base dos modelos conocidos de memorias asociativas: la *Lernmatrix* de Steinbuch y el *Linear Associator*.

El algoritmo del CHP recoge lo mejor de ambos modelos y elimina sus desventajas, y con ello se ha logrado crear un método híbrido que tiene la ventaja de que puede trabajar patrones de entrada con valores reales, y además no requiere de la restricción de ortogonalidad, impuesta por el *Linear Associator*.

Los avances, ejemplificados profusamente en el presente artículo, mejoran notablemente el rendimiento del CHP bajo ciertas condiciones, y dan origen a un nuevo algoritmo, el Clasificador Asociativo de Patrones, cuyas bases de diseño y funcionamiento se muestran a lo largo del artículo.

El trabajo futuro inmediato es aplicar el algoritmo del Clasificador Asociativo de Patrones a un número representativo de bases de datos públicas conocidas y probadas, y realizar un estudio comparativo del modelo propuesto con modelos de clasificadores clásicos.

VIII. AGRADECIMIENTOS.

Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFFA y

Secretaría Académica del IPN, CONACYT y Sistema Nacional de Investigadores.

REFERENCIAS

- [1] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics*, 26, 175-185.
- [2] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Foundations of Research*, Cambridge: MIT Press.
- [3] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.
- [4] Ayaquica-Martínez, I. O. (2002). Algoritmo C-means usando funciones de disimilitud, Tesis de maestría, CIC-IPN, México.
- [5] Bosch, H. & Kurfess, F.J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks* (11), 5, 869-876.
- [6] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA'99*, México, D.F., 23-38.
- [7] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.
- [8] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 4, 353-359.
- [9] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [10] Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 281-293.
- [11] Santiago-Montero, R., Yáñez-Márquez, C. & Diaz de León, J. L. (2002). Clasificador híbrido de patrones basado en la *Lernmatrix* de Steinbuch y el *Linear Associator* de Anderson-Kohonen, *Research on computing science, Reconocimiento de patrones, avances y perspectivas*, 449-460. México: CIC-IPN.
- [12] Santiago-Montero, R. (2003). *Clasificador Híbrido de Patrones basado en la Lernmatrix de Steinbuch y el Linear Associator de Anderson-Kohonen*. Tesis de Maestría en Ciencias de la Computación, CIC-IPN, Septiembre de 2003.
- [13] Steinbuch, K. (1961). Die *Lernmatrix*, *Kybernetik*, 1, 1, 36-45
- [14] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale *Lernmatrizen* als Perzeptoren, *Kybernetik*, 1, 3, 117-124.
- [15] Yáñez-Márquez, C. (2002). *Memorias Asociativas Basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios*, Tesis doctoral, CIC-IPN, México.
- [16] Yáñez-Márquez, C. & Diaz de León, J. L. (2001a). *Lernmatrix* de Steinbuch, *IT 48, Serie Verde*, CIC-IPN, México.